Dirichle L funkcijų ir Hurvico dzeta funkcijų kai kurių kombinacijų nuliai

Antanas Laurinčikas, Virginija Garbaliauskienė ir Julija Karaliūnaitė

Mathematical Modelling and Analysis, 2017

Pagrindinis rezultatas:
Tam tikros tiesinės ir bendresnės Dirichlet L funkcijų ir Hurwitzo dzeta funkcijų kombinacijos kritinėje juostoje turi be galo daug nulių. Įrodymams taikomas šių kombinacijų universalumas.

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Dirichle (Dirichlet) eilutė apibrėžiama taip:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

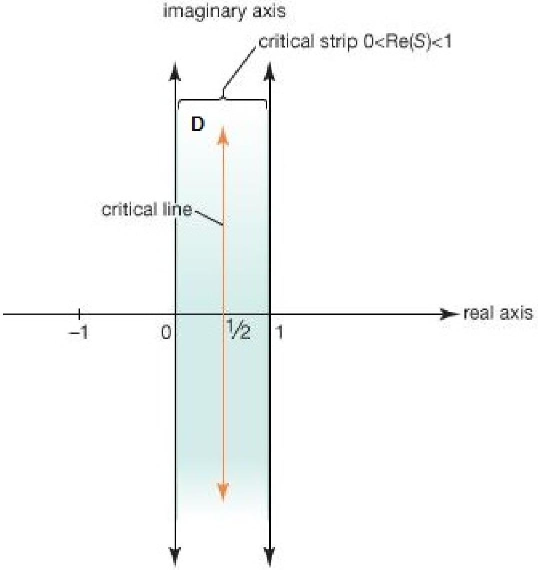
kur a_n - kompleksinių skaičių seka.

Kritine juosta vadinsime sritį:

$$\{s \in \mathbb{C} : \ 0 < \sigma < 1\}$$

Kritine tiese vadinsime sritį:

$$\{s \in \mathbb{C} : \ \sigma = \frac{1}{2}\}$$


imaginary axis
critical strip 0<Re(S)<1
D
critical line
real axis
−1
0
½
1

Tegul χ - Dirichle charakteris, α $(0 < \alpha \leq 1)$ - fiksuotas parametras. Dirichle L funkcija $L(s, \chi)$ ir Hurvico (Hurwitz) dzeta funcija $\zeta(s, \alpha)$, kai $\sigma > 1$, apibrėžiamos atitinkamomis eilutėmis

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s} \quad \text{ir} \quad \zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s},$$

ir pratęsiamos meromorfiškai į visą kompleksinę plokštumą.

Žinoma, kad $L(s,\chi) \neq 0$ pusplokštumėje $\sigma > 1$, o kritinėje juostoje $\{s \in \mathbb{C} :\ 0 < \sigma < 1\}$ turi begalo daug nulių. Šiai funkcijai galioja apibendrinta Rymano (Riemann) hipotezė tegianti, jog visi nuliai guli kritinėje tiesėje.

Funkcijos $\zeta(s,\alpha)$ savybės, taip pat ir nulių pasiskirstymas, priklauso nuo parametro α.

- $\{s \in \mathbb{C} :\ \sigma > 1\}$: Kai α transcendentinis, racionalus ($\alpha \neq 1, \frac{1}{2}$) (H. Davenport and H. Heilbronn 1936) arba algebrinis iracionalus (J.W.S. Cassels, 1961), $\zeta(s,\alpha)$ turi begalo daug nulių.
- $D = \left\{s \in \mathbb{C} :\ \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$: Tegul $\alpha = \frac{a}{q}$, $(a,q) = 1$ ir $0 < a < q$, kad σ_1, σ_2, $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, egzistuoja kontanta $c = c(\alpha, \sigma_1, \sigma_2) > 0$ tokia, kad pakankamai dideliam T, funkcija $\zeta(s,\alpha)$ turi daugiau nei cT nulių, gulinčių stačiakampyje $\{s \in \mathbb{C} :\ \sigma_1 < \sigma < \sigma_2,\ |t| < T\}$. (S.M. Voronin 1977). Tai galioja ir transcendentiniam α (S.M. Gonek 1979). Algebrinis iracionalaus α atvejis lieka atviras.

Universalumas

Teiginių apie $\zeta(s, \alpha)$ nulių pasiskirstymą juostoje D įrodymai remiasi jos universalumo savybe.
Pažymėkime: $\mathrm{meas}\{A\}$ - mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas.
Tuomet $\zeta(s, \alpha)$ universalumą nusako šis teiginys:

Universalumo teorema Hurvico dzeta funkcijai (S.M. Gonek 1979, B. Bagchi 1981). Tarkime α yra racionalus $\neq 1, \frac{1}{2}$ arba transcendentinis skaičius. Tegul $K \subset D$ - kompaktiškas poaibis su jungiu papildiniu ir tegul $f(s)$ yra tolydi funkcija virš K ir analizinė K išorėje.
Tada kiekvienam $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Jungtinė universalumo teorema Dirichle L funkcijų postūmiams (J. Steuding 2007). Tarkime, kad $\chi_1, \ldots, \chi_n$ yra poromis neekvivalentūs Dirichle charakteriai. Tegul K_j $(j = 1, \ldots, n)$ kompaktiškas juostos D poaibis su jungiu papildiniu ir tegul $f_j(s)$ - tolydžios, nevirstančios nuliu srityse K_j funkcijos, kurios yra analizinės K_j išorėje. Tuomet, kiekvienam $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \sup_{1\le j\le n} \sup_{s\in K_j} |L(s + i\tau, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Daug universalumo rezultatų Hurwico dzeta ir Dirichle L funkcijoms bei įvairioms jų kombinacijoms gauta:
J. Steuding (2007) ir A. Laurinčiko (2008, 2011, 2012) darbuose.

Daug rezultatų apie universalių funkcijų tiesinių kombinacijų arba jų daugianarių nulius galima rasti: T. Nakamura ir L. Pankowski (2012, 2016) darbuose.

Mūsų gauti rezultatai skirti tam tikrų tiesinių ir bendresnių Dirichle L funkcijų ir Hurvico dzeta funkcijų kombinacijų nuliams.

Teoremos apie tam tikrų tiesinių ir bendresnių Dirichle L funkcijų ir Hurvico dzeta funkcijų kombinacijų nulius

Laikysime, jog funkcijai $L(s)$, teiginys $A(\sigma_1, \sigma_2; c, T)$ yra teisingas, jei kiekvieniem σ_1, σ_2, $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, egzistuoja konstanta $c > 0$ tokia, kad pakankamai dideliam T, funkcija $L(s)$ turi daugiau negu cT nulių stačiakampyje $\{s \in \mathbb{C}: \ \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, \ 0 < t < T\}$.

Teorema 1.
Sakykime, $\chi_1, \dots, \chi_n$ yra poromis neekvivalentūs Dirichle charakteriai, o $P_1(s), \dots, P_n(s)$ bendrosios Dirichle eilutės turinčios skirtingus nulius ir absoliučiai konverguojančios, kai $\sigma > \frac{1}{2}$, ir bent dvi iš eilučių $P_j(s)$ nevirsta nuliais juostoje D. Tuomet egzistuoja konstanta $c = c(\chi_1, \dots, \chi_n, P_1, \dots, P_n, \sigma_1, \sigma_2) > 0$ tokia, kad tiesinei kombinacijai

$$P_1(s)L(s, \chi_1) + \dots + P_n(s)L(s, \chi_n),$$

teisingas teiginys $A(\sigma_1, \sigma_2; c, T)$.

Pažymėkime $H(D)$ erdvę analizinių funkcijų virš aibės D su tolygaus konvergavimo ant kompakto topologija. Tegul

$$S = \left\{ g \in H(D) : \ \frac{1}{g(s)} \in H(D) \text{ or } g(s) \equiv 0 \right\},$$

ir pažymėkime U_n klasę tolydžių operatorių $F : \ H^n(D) \to H(D)$ tokių, kad kiekvienai atvirai aibei $G \subset H(D)$,

$$\left(F^{-1}G\right) \cap S^n \neq \varnothing.$$

Teorema 2.
Tarkime, $\chi_1, \ldots, \chi_n$ poromis neekvivalentūs Dirichle charakteriai, o $F \in U_n$. Tuomet egzistuoja konstanta $c = c(\chi_1, \ldots, \chi_n, F,$ $\sigma_1, \sigma_2) > 0$ tokia, kad funkcijai $F(L(s, \chi_1), \ldots, L(s, \chi_n))$, galioja teiginys $A(\sigma_1, \sigma_2; c, T)$.

Klasė U_n teorinė, sunku patikrinti jos prielaidas. Apibrėžkime paprastesnę operatorių klasę F. Tegul V bet koks teigiamas skaičius, $D_V = \left\{s \in \mathbb{C} : \ \frac{1}{2} < \sigma < 1, \ |t| < V\right\}$ ir

$$S_V = \left\{g \in H(D_V) : \ \frac{1}{g(s)} \in H(D_V) \text{ or } g(s) \equiv 0\right\}.$$

Sakome, kad tolydus operatorius $F : \ H^n(D_V) \to H(D_V)$ priklauso klasei $U_{n,V}$, jeigu su kiekvienu polinomu $p = p(s)$,

$$\left(F^{-1}\{p\}\right) \cap S_V^n \neq \varnothing.$$

Teorema 3.
Tarkime, $\chi_1, \dots, \chi_n$ poromis neekvivalentūs Dirichle charakteriai, o $F \in U_{n,V}$ su pakankamai dideliu V. Tuomet egzistuoja konstanta $c = c(\chi_1, \dots, \chi_n, F, \sigma_1, \sigma_2) > 0$ tokia, kad funkcijai $F(L(s, \chi_1), \dots, L(s, \chi_n))$, galioja teiginys $A(\sigma_1, \sigma_2; c, T)$ su $T < V$.

Pavyzdys

Pateiksime operatoriaus $F \in U_V$ pavyzdį.

Tegul $F(g_1, g_2) = g_1^2 + g_2^2$, $g_1, g_2 \in H(D_V)$, o $p(s)$ - bet koks polinomas.

Tuomet egzistuoja konstanta $c_1 > 0$ tokia, kad $|p(s)| \leq c_1$, kai $s \in D_V$.

Paimkime $C > c_1$ ir

$$p_1(s) = \frac{p(s) + C}{2\sqrt{C}}, \qquad p_2(s) = \frac{p(s) - C}{2i\sqrt{C}}.$$

Tuomet turime, kad $p_1(s) \neq 0$ ir $p_2(s) \neq 0$ srityje D_V. Beto,

$$p_1^2(s) + p_2^2(s) = p(s).$$

Todėl, $(p_1, p_2) \in \left(F^{-1}\{p\}\right) \cap S_V^2$. Taip pat, jeigu χ_1 ir χ_2 yra neekvivalentūs charakteriai, tai funkcija

$$L^2(s, \chi_1) + L^2(s, \chi_2)$$

turi daugiau negu cT nulių stačiakampyje $\{s \in \mathbb{C} : \ \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, \ 0 < t < T\}$ su pakankamai dideliu $T < V$.

Pavyzdys

Tegul $P_1(s), \dots, P_n(s)$ analizinės funkcijos srityje D, dvi iš jų nevirstančios nuliais, o likusios aprėžtos polinomais. Tuomet funkcijai

$$P_1(s)L(s, \chi_1) + \dots + P_n(s)L(s, \chi_n),$$

kur $\chi_1, \dots, \chi_n$ poromis neekvivalentūs Dirichle charakteriai, galioja teiginys $A(\sigma_1, \sigma_2; c, T)$.

Iš tikrųjų, operatorius $F : H^n(D_V) \to H(D_V)$ apibrėžtas formule

$$F(g_1, \dots, g_n) = P_1 g_1 + \dots + P_n g_n, \quad g_1, \dots, g_n \in H(D_V),$$

yra tolydus. Tegul $p = p(s)$ bet kuris polinomas. Imkime, kad $P_1(s)$ ir $P_2(s)$ nevirstantys nuliais, kai $s \in D$. Beto, egzistuoja polinomai $q_j(s)$, $j = 3, \dots, n$, tokie, kad kai $s \in D$, $|P_j(s)| \le |q_j(s)|$, $j = 3, \dots, n$.

Imame

$$
\begin{aligned}
g_1(s) &= \frac{p(s)+C}{P_1(s)},\\
g_2(s) &= \frac{-(P_3(s)+\cdots+P_n(s))-C}{P_2(s)},\\
g_3(s) &= \cdots = g_n(s) = 1,
\end{aligned}
$$

kur $C>0$ tokia, kad $p(s)+C\neq 0$ ir $-(P_3(s)+\cdots+P_n(s))-C\neq 0$ srityje D_V. Tuomet turime

$$
P_1g_1+\cdots+P_ng_n = p
$$

ir $g_1,\ldots,g_n\neq 0$ on D_V. todėl Teoremos 3 prielaidos yra patenkintos.

Toliau pateiksime rezultatus apie tam tikrų Hurvico dzeta funkcijų nulius.

Apibrėžkime:

$$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \{\log(m + \alpha_j) : \; m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, j = 1, \ldots, n\}.$$

Teorema 4.
Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių $\mathbb{Q}$, o $c_1, \ldots, c_n$ yra kompleksiniai skaičiai, kurių bent vienas nelygus 0. Tuomet egzistuoja konstanta $c = c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, c_1, \ldots, c_n, \sigma_1, \sigma_2) > 0$ tokia, jog funkcijai

$$c_1\zeta(s, \alpha_1) + \cdots + c_n\zeta(s, \alpha_n),$$

teisingas teiginys $A(\sigma_1, \sigma_2; c, T)$.

Pažymėkime $\hat{U}_n$ tolydžių operatorių $F: \ H^n(D) \to H(D)$ klasę tokią, kad kiekvienai atvirai aibei $G \subset H(D)$, aibė $F^{-1}G$ yra netuščia.

Teorema 5.
Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, ir kad $F \in \hat{U}_n$. Tuomet egzistuoja konstanta $c = c(\alpha_1, \dots, \alpha_n, F, \sigma_1, \sigma_2) > 0$ tokia, jog funkcijai $F(\zeta(s, \alpha_1), \dots, \zeta(s, \alpha_n))$, teisingas teiginys $A(\sigma_1, \sigma_2; \, c, \, T)$.

Dabar paimsime paprastesnę operatorių klasę. Pažymėkime $\hat{U}_{n1}$ tolydžių operatorių $F: \ H^n(D) \to H(D)$ klasę tokią, kad kiekvienam polinomui $p(s)$ egzistuoja jo pirmvaizdis $F^{-1}\{p\}$.

Teorema 6.
Tarkime, kad aibė $L(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, ir kad $F \in \hat{U}_{n1}$. Tuomet egzistuoja konstanta $c = c(\alpha_1, \dots, \alpha_n, F, \sigma_1, \sigma_2) > 0$ tokia, jog funkcijai $F(\zeta(s, \alpha_1), \dots, \zeta(s, \alpha_n))$, teisingas teiginys$A(\sigma_1, \sigma_2;\ c,\ T)$.

Pavyzdžiui, operatorius $F: \ H^2(D) \to H(D)$ apibrėžtas formule $F(g_1, g_2) = g_1^2 + g_2^2$, priklauso klasei $\hat{U}_{21}$. Iš tikrųjų, kiekvienam polinomui $p(s)$ egzistuoja du polinomai

$$p_1(s) = \frac{p(s) + 1}{2} \quad \text{and} \quad p_2(s) = \frac{p(s) - 1}{2i},$$

ir $p_1^2(s) + p_2^2(s) = p(s)$.

Dabar nagrinėsime funkcijų rinkinį $L(s,\chi_1),\ldots,\ L(s,\chi_l),\zeta(s,\alpha_1),$ $\ldots,\zeta(s,\alpha_r)$. Pažymėkime $\mathcal{P}$ aibę visų pirminių skaičių ir apibrėžkime aibę

$$L\left(\mathcal{P},\alpha_1,\ldots,\alpha_r\right)=\{(\log p:\ \ p\in\mathcal{P}),(\log(m+\alpha_j):$$

m$\in\mathbb{N}_0,j=1,\ldots,r)$.

Teorema 7.
Tarkime, $\chi_1,\ldots,\chi_l$ poromis neekvivalentūs Dirichle charakteriai, o aibė $L\left(\mathcal{P},\alpha_1,\ldots,\alpha_r\right)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Tegul $c_1,\ldots,c_l,\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_r$ kompleksiniai skaičiai, kurių bent vienas $\hat{c}_j$ ne 0. Tuomet egzistuoja konstanta
$c=c(\chi_1,\ldots,\chi_l,\alpha_1,\ldots,\alpha_r,c_1,\ldots,c_l,\hat{c}_1,\ldots,\hat{c}_r,\ \sigma_1,\sigma_2)>0$
tokia, jog funkcijai

$$c_1L(s,\chi_1)+\cdots+c_lL(s,\chi_l)+\hat{c}_1\zeta(s,\alpha_1)+\cdots+\hat{c}_r\zeta(s,\alpha_r),$$

teisingas teiginys $A(\sigma_1,\sigma_2;c,T)$.

Laikysime, jog tolydus operatorius $F: \ H^{l+r}(D) \to H(D)$ priklauso klasei $U_{l,r}$, jeigu kiekvienam polinomui $p(s)$ aibė $(F^{-1}\{p\}) \cap (S^l \times H^r(D))$ yra netuščia.

Teorema 8.
Tarkime, $\chi_1, \dots, \chi_l$ poromis neekvivalentūs Dirichle charakteriai, aibė $L(\mathcal{P}, \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$ ir $F \in U_{l,r}$. Tuomet egzistuoja konstanta $c = c(\chi_1, \dots, \chi_l, \alpha_1, \dots, \alpha_r, F, \sigma_1, \sigma_2) > 0$ tokia, jog funkcijai

$$F\left(L(s, \chi_1), \dots L(s, \chi_l), \zeta(s, \alpha_1) \dots, \zeta(s, \alpha_r)\right),$$

teisingas teiginys $A(\sigma_1, \sigma_2; c, T)$.

Ačiū už dėmesį!